2011 Compétition mathématiques CIPAS

Durée 3 heures

Les membres d'une équipe peuvent collaborer entres eux mais avec personne d'autre. Les calculatrices et les notes sont interdites.

Écrivez les réponses à chaque question sur des feuilles distinctes et ne faites aucune référence à vos autres réponses puisque les différentes questions seront corrigées séparément. Inscrivez votre **numéro d'équipe** et le **numéro de la question** sur **CHAQUE** page. N'inscrivez pas vos noms, le nom de votre équipe ou de votre université sur les feuilles réponses. Montrez tout votre travail.

Inscrivez vos noms, votre université et votre numéro d'équipe sur l'enveloppe avant de remettre vos réponses.

Peu de points sont alloués pour des réponses fragmentaires ou incomplètes.

Le questionnaire a 8 questions. Chacune des questions a le même poids.

Compétition mathématiques CIPAS 2011

QUESTIONS

1. Esquissez : $\{(x, y) : \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor y^2 \rfloor = 4\}$
Où, pour chaque réel x, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

2. Étant donné un n-gone régulier, combien de quadrilatères convexes définis par des quadruples de ses sommets sont des trapèzes non rectangulaires?

3. Si α,β,γ sont les racines de $x^3 - x - 1 = 0$, calculez $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1+\beta}{1-\beta} + \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$

4. Soit le quadrilatre convexe $ABCD$
(a) Montrez qu'il existe toujours des points W, X, Y et Z tels que Z est le milieu de AW, W est le milieu de BX, X est le milieu de CY et Y est le milieu de DZ;
(b) montrez que aire $(\triangle ABW)$ + aire ($\triangle CDY$) = aire $(\triangle BCX)$ + aire $(\triangle DAZ)$

5. La fonction à valeurs réelles infiniment différentiable $f(x)$ est telle que
$f(0) = 1, f^{'}(0) = 2, f^{''}(0) = 3$. De plus, f a la propriété que
$f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x) + f^{(n+2)}(x) + f^{(n+3)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Trouvez $f(x)$.

6. Trouvez la fraction, avec dénominateur inférieur à 100, qui soit la plus près de $\frac{3}{7}$ (sans y être égale).

7. Si on retranche le graphe de $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2$ de $I\!R^3$, combien reste-t-il de composantes connexes?

8. Supposons que $sin(a) + sin(a + b) + cos(b) = -1$.
Montrez que $cos(a) + cos(a + b) + sin(b) = 0$.