2013 Science Atlantic Mathematics Competition

October 18, 2013

INSTRUCTIONS:

- Present solutions to the following 8 questions on the pages provided.
- Greater credit will be awarded to complete, well-written solutions.
- No notes, calculators, or other such aids are permitted.
- The competition is 3 hours in duration.

---

1. Consider a rectangle with sides of lengths 2 and 3. Fix P and Q on the sides of length 2 so that PQ is parallel to the sides of length 3. Let$X$ be a point on one of the sides of length 3, and let Y be a point on the other side of length 3.

   Find the minimum value of $PX + XY + YQ$ as X and Y vary.

2. Describe the set of points $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 - |x| - |y| - |z| = |1 - x - y - z|\}$.

3. Find a sequence of moves by which a chess knight can visit every square of a 4×4 board exactly once and return to its starting square, or prove that no such sequence exists.

   (A knight moves one square horizontally and two squares vertically, or one square vertically and two squares horizontally.)

4. For the portion of the curve $\sin x + \sin y = 1$ lying in the first quadrant, find the constant α such that $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \frac{d^2 y}{d\,x^2}$ is defined but not equal to zero.

5. Points A, B, C, D, E, and F lie in that order on a circle such that the chords AD, BE, and CF are concurrent (but not at the centre of the circle). Let the points P, Q, and R be the midpoints of the chords AD, BE, and CF respectively. Chords AG and AH are drawn parallel to chords BE and CF. Prove that $\triangle PQR$ and $\triangle DGH$ are similar.

6. The digits $1, 2, \ldots, 9$ are arranged at random into a 3×3 matrix. What is the probability that the determinant of the matrix is even?

7. For which positive integers n is $n^4 + 4^n$ a prime number?

8. Let n be a positive integer. A *composition* of n is a sequence of positive integers that adds up to n. For example, the compositions of 3 are (3), $(2, 1)$, $(1, 2)$, and $(1, 1, 1)$. For the composition α, define the *length* of α, written $l(\alpha)$, to be the number of entries in α. Moreover, let $\alpha!$ denote the product of the factorials of the entries of α. For example, for the compositions of 3, we have

α	$l(\alpha)$	$\alpha!$
(3)	1	$3! = 6$
$(2, 1)$	2	$2! \cdot 1! = 2$
$(1, 2)$	2	$1! \cdot 2! = 2$
$(1, 1, 1)$	3	$1! \cdot 1! \cdot 1! = 1$.

   Let S_n be the sum of $(-1)^{n-l(\alpha)}\, n!/\alpha!$ taken over all compositions α of n. Prove that $S_n = 1$ for any positive integer n.

   For example, for $n = 3$, we have

   $$(-1)^2\, 3!/6 + (-1)^1\, 3!/2 + (-1)^1\, 3!/2 + (-1)^0\, 3!/1 = 1 - 3 - 3 + 6 = 1 \ .$$

Conférence Annuelle du Canada Atlantique, 2013: Compétition de Mathématiques

18 Octobre 2013

INSTRUCTIONS:

- Donner les solutions aux 8 questions suivantes sur les pages fournies.
- Plus de crédit sera attribué aux solutions complètes et bien écrites.
- Les notes de cours, les calculatrices, ou autres références ne sont pas autorisées.
- La durée de la compétition est 3 heures.

---

1. On considère un rectangles avec des cotés de longueur 2 et 3. On place P et Q sur les cotés de longueur 2 de façon que PQ soit parallèle aux cotés de longueur 3. Soit X un point sur l'un des deux cotés de longueur 3, et soit Y un point sur l'autre coté de longueur 3.

   Trouver la valeur minimale de $PX + XY + YQ$, lorsque X et Y varient.

2. Décrire l'ensemble des points $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 - |x| - |y| - |z| = |1 - x - y - z|\}$.

3. On s'intéresse à une série de mouvements par laquelle un chevalier du jeu d'échec peut visiter exactement une fois chaque case d'un échiquier contenant $4 * 4$ cases, et puis il retourne à la case du départ. On vous demande de trouver cette série de mouvements ou bien prouver qu'elle telle série n'existe pas. (Un chevalier se déplace d'une case horizontalement et deux cases verticalement, ou bien une case verticalement et deux cases horizontalement.)

4. Pour la partie de la courbe $\sin x + \sin y = 1$ qui se trouve dans le premier quadrant, on vous demande de chercher la constante α pour que la limite $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \dfrac{d^2y}{d\,x^2}$ soit définie et non nulle.

5. On suppose que les points A, B, C, D, E, et F se trouvent dans cet ordre sur un cercle tels que les segments AD, BE, et CF sont concourants (mais non pas au centre du cercle). Soient P, Q, et R les mi-points des segments AD, BE, et CF, respectivement. De plus on suppose que les segments AG et AH sont parallèles aux segments BE et CF. Montrer que $\triangle PQR$ et $\triangle DGH$ sont similaires.

6. On place les chiffres $1, 2, \ldots, 9$ d'une manière aléatoire dans une matrice carrée d'ordre 3. Quelle est la probabilité que le déterminant de la matrice soit pair?

7. Pour quels entiers positifs n, on a $n^4 + 4^n$ un nombre premier?

8. Soit n un entier positif. Une composition de n est une suite des entiers positifs dont la somme est égale à n. Par exemple, les compositions de 3 sont (3), $(2, 1)$, $(1, 2)$, et $(1, 1, 1)$. Pour la composition α, on définit la longueur de α, dénotée par $l(\alpha)$, comme étant le nombre d'entrées dans α. De plus, soit $\alpha!$ le produit des factoriels des entrées de α. Par exemple, pour la composition de 3, on a

α	$l(\alpha)$	$\alpha!$
(3)	1	$3! = 6$
$(2,1)$	2	$2! \cdot 1! = 2$
$(1,2)$	2	$1! \cdot 2! = 2$
$(1,1,1)$	3	$1! \cdot 1! \cdot 1! = 1$.

   Soit S_n la somme de $(-1)^{n-l(\alpha)}\, n!/\alpha!$ sur toutes les compositions α de n. Montrer que pour tout n entier positif on a $S_n = 1$.

   Par exemple, pour $n = 3$, on a

   $$(-1)^2\, 3!/6 + (-1)^1\, 3!/2 + (-1)^1\, 3!/2 + (-1)^0\, 3!/1 = 1 - 3 - 3 + 6 = 1 \ .$$