Compétition mathématique CIPAS 2010

Durée : 3 heures.

Les membres d'une équipe peuvent collaborer entre eux, mais pas avec les autres. Les notes et les calculatrices sont interdites.
Écrivez vos réponses à chaque question sur des feuilles séparées et ne faites aucune référence à d'autres questions puisque les questions seront corrigées séparément. Inscrivez votre numéro d'équipe sur chaque page. Ne pas indiquer vos noms, vos noms d'équipe ou d'universités sur les feuilles réponses. Justifiez toutes vos réponses.
Inscrivez votre université, vos noms et votre numéro d'équipe à l'extérieur de l'enveloppe avant de remettre vos réponses.
Peu de points seront attribués aux réponses partielles.
Ce questionnaire a huit questions. Chacune des huit questions a la même pondération.

Compétition mathématique CIPAS 2010

QUESTIONS

1. Étant donné un trapèze $ABCD$ (pas forcément isocèle) avec AB parallèle à DC et $AD = DC = \frac{AB}{2}$, déterminer la mesure de l'angle ACB.

2. Dans le pays d'Angina, l'inflation est galopante et tous les prix sont en puissances de 10. Le président est tellement excentrique, que tous les billets de banque du pays ont des dénominations dont tous les chiffres sont des 2. Par exemple 2\$, 22\$, 222\$, 2222\$, ...Une Anginoise paie une voiture 10^{2010}\$. Quel est le nombre minimal de billets qu'elle peut utiliser?

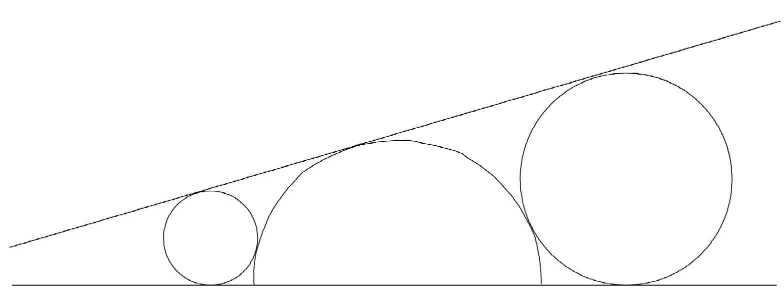
3. Supposer que $a \neq 0$ et r sont des nombres tels que ar^i est un entier pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que r est un entier. (ici, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.)

4. Pour une matrice carrée A, nous appelons n'importe quelle matrice B telle que $AB = A + B$ une amie de A. Nous appelons un vecteur non nul x tel que Ax = x un point fixe de A. Montrez que toute matrice carrée a un point fixe ou une amie mais pas les deux.

5. Combien de solutions y a-t-il à
$$a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2 + a_1a_2 + ... + a_{2009}a_{2010} + a_{2010}^2 = 1?$$

6. Supposer que la fonction continue f a la propriété que pour tout x, $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{\text{il y a } 2010\, f} = 0$.
Montrer qu'il doit exister un intervalle $I = [a, b]$, $a \neq b$, avec $0 \in I$ et $f(I) = 0$.

7. La fonction pseudo-Smarandache f est définie pour les entiers positifs n par: $f(n)$ est le plus petit entier positif m tel que $n | \frac{m(m+1)}{2}$. Montrer que $f(n) \geq n$ si et seulement si $n = 2^r$ pour un certain entier non négatif r.

8. 

La figure ci-dessus consiste en deux cercles, deux tangentes à ces deux cercles, et un demi-cercle dont le diamètre repose sur une des lignes et qui est tangent à l'autre ligne et aux deux cercles. Si les rayons des deux cercles mesurent 4 et 9, quel est le rayon du demi-cercle?