# 2008 Comptition mathématiques CIPAS

Durée 3 heures

Les membres d'une équipe peuvent collaborer entres eux mais avec personne d'autre. Les calculatrices et les notes sont interdites.

Écrivez les réponses à chaque question sur des feuilles distinctes et ne faites aucune référence à vos autres réponses puisque les différentes questions seront corrigées séparément. Inscrivez votre numéro d'équipe et le numéro de la question sur CHAQUE page. N'inscrivez pas vos noms, le nom de votre équipe ou de votre université sur les feuilles réponses. Montrez tout votre travail.

Inscrivez vos noms, votre université et votre numéro d'équipe sur l'enveloppe avant de remettre vos réponses.

Peu de points sont alloués pour des réponses fragmentaires ou incomplètes.

Le questionnaire a 8 questions. Chacune des questions a le même poids.

# Compétition mathématiques CIPAS 2008

## QUESTIONS

1. Si je lance quatre dés à six faces, quelle est la probabilité que le produit des nombres soit 36?

2. Trouver le minimum de $f(x) = \dfrac{1 + \cos(2x) + 8\sin^2(x)}{\sin(2x)}$ sur l'intervalle $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

3. Quel est le plus petit nombre de neuf chiffres en base 10 qui contienne tous les chiffres de 1 à 9 et qui soit divisible par 99?

4. Considérer les 24 matrices $2 \times 2$ qu'on peut obtenir en arrangeant les quatre lettres $w, x, y$ et $z$. Pour un certain choix de nombres non négatifs $w, x, y$ et $z$, on trouve que quatre de ces matrices ont un déterminant égal à 16, quatre ont un déterminant égal à -16 et seize ont un déterminant nul. Quels sont tous les ensembles solutions possibles pour $\{w, x, y, z\}$?

5. Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels. Supposons que $f$ soit surjective et que $g$ soit injective. Supposez aussi que $f(n) \geq g(n)$ pour tout $n$. Montrez que $f(n) = g(n)$ pour tout $n$.

6. Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ et $b_1, b_2, \ldots b_n$ des nombres positifs, montrez que
$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n}.$$

7. Quand le club de maths annonce une "danse (M,N)", cela signifie qu'on a demandé au DJ que la M$^{\text{e}}$ danse après une danse rapide soit une danse lente et que la N$^{\text{e}}$ danse après une danse lente soit une danse rapide. (Toutes les danses sont rapides ou lentes; le DJ évite d'embarrasser les gens avec des danses mal définies). Pour certaines valeurs de M et N cela signifie que les danses arrêtent rapidement et qu'on peut passer la pizza alors que pour d'autres valeurs de M et N les danses peuvent se poursuivre indéfiniment. Quelles sont les paires ordonnées (M,N) pour lesquelles il n'y a pas de limites supérieures au nombre de danses?

8. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle $\Gamma$ avec $AD < CD$. Les diagonales $AC$ et $BD$ se coupent en $E$. On place $M$ sur $EC$ de manière à ce que $\angle CBM = \angle ACD$. Montrer que le cercle circonscrit au $\triangle BME$ est tangent $\Gamma$ au point $B$.