# 2007  Compétition mathématiques CIPAS

Durée 3 heures

Les membres d'une équipe peuvent collaborer entres eux mais avec personne d'autre.   Les calculatrices et les notes sont interdites.

Écrivez les réponses à chaque question sur des feuilles distinctes et ne faites aucune référence à vos autres réponses puisque les différentes questions seront corrigées séparément.  Inscrivez votre **numéro d'équipe** et le **numéro de la question** sur CHAQUE  page.  N'inscrivez pas vos noms, le nom de votre équipe ou de votre université sur les feuilles réponses.  Montrez tout votre travail.

Inscrivez  vos noms, votre université et votre numéro d'équipe sur l'enveloppe  avant de remettre vos réponses.

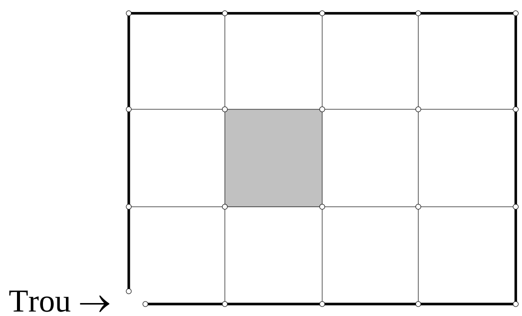
Peu de points sont alloués pour des réponses fragmentaires ou incomplètes.

Le questionnaire a 8 questions sur 2 pages.  Chacune des questions a le même poids.

QUESTIONS

1. Les éclaireurs d'une colonie de fourmis découvrent une barre de chocolat enveloppée de papier d'aluminium. Ils percent un petit trou dans un coin de l'emballage d'aluminium et ensuite les ouvrières vont et viennent au travers de ce trou et rapportent de petits morceaux de chocolat à leur nid.

   La barre de chocolat est une palette rectangulaire uniforme de 3cm sur 4 cm pesant 100 grammes. Douze carrés sont inscrits sur l'emballage comme indiqué sur la figure.

   Les fourmis détestent marcher sur le papier d'aluminium. Ainsi lorsque chaque fourmi pénétrait par le trou, elle marchait jusqu'au point le plus rapproché de la surface de chocolat et en retirait un morceau. En fait elles détestent tant marcher sur le papier d'aluminium que leur efficacité s'en ressent. Si R, le taux auquel elles retirent le chocolat (grammes / heures) change avec la distance s (cm) entre le trou et la surface de chocolat selon la formule :

   $$R = 10\, e^{-s}.$$

   (a) Lorsque le dernier morceau de chocolat sous le carré ombragé a été retiré, une ouvrière a lancé : « Nous avons retiré ___ grammes de chocolat ». Trouvez le nombre manquant.
   (b) Combien de temps est-ce que ça a pris depuis le début jusqu'au moment ou le dernier morceau de chocolat sous le carré ombragé soit retiré?

2. Combien de suites $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ satisfont ces deux conditions :

   (a) $a_i \in \{1, 2, 3\}$; et
   (b) $|a_{i+1} - a_i| = 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

3. Dans le triangle ABC, D est situé sur BC de telle manière qu'AD soit une hauteur du triangle. Un point P est situé sur AD de telle sorte que ∠PCB = 30°, ∠PBA = 20° et ∠PBC = 40°. Trouvez les mesures de ∠PAC et de ∠PCA

4. Soient $a_0$ et $b_0$ des nombres réels positifs. Pour n = 0, 1, 2, … soient

$$a_{n+1} = \frac{(a_n+b_n/e)^2}{(a_n+b_n)^2},$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n \times (a_n+ b_n/e)}{(a_n+b_n)^2}.$$

Déterminer les valeurs de

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

5. Soit $I_3$ l'ensemble de toutes les matrices inversibles $3 \times 3$ dont les entrées sont prises dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Est-il possible d'aller de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ à $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, en ne changeant qu'une entrée à la fois et sans sortir de $I_3$ ?

6. Vous avez une grande feuille de papier sur votre pupitre. Il y a un point fixe sur votre pupitre que nous appellerons l'origine. Marquez le point sur le papier qui est au dessus de l'origine. Éloignez le papier de vous de 1 cm puis faites le tourner de $\frac{180°}{n}$ dans le sens horaire autour de l'origine. Éloignez de nouveau le papier de vous de 1 cm puis faites le tourner de nouveau de $\frac{180°}{n}$. Répétez n fois. Quelle est la position du point marqué sur le papier par rapport à l'origine?

7. Trouvez toutes les fonctions f définies sur les entiers telles que

$$f(n^2) = f(n + m)\, f(n - m) + m^2,$$

pour tous les entiers m et n.

8. Factorisez le polynôme $x^{256} + y^{256}$ complètement en polynômes à coefficients réels.