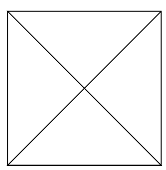
APICS Competition mathématique 2002

le 18 octobre, 2002

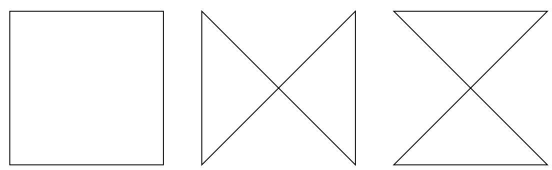
1. Pour chaque nombre entier n, soit $s_n = (n + 13)(n + 77)$ et $t_n = n(n + 91)$. Soit $S = s_1 + s_2 \ldots + s_{2002}$ et $T = t_1 + t_2 + \ldots + t_{2002}$. Lequel de S ou T est le plus grand? Démontrez votre réponse.

2. $\mathbf{K}_n$ est un graphe sur n vertices, où chaque paire de vertices est joignée par un bord.

   Il y a trois cycles différents de longeur 4 dans $\mathbf{K}_4$.

   $\mathbf{K}_4$

   Cycles de longeur 4 dans $\mathbf{K}_4$

   Combien de cycles différents de longeur t y-a-t'il dans $\mathbf{K}_n$?

3. Soit $f(a, b)$ la somme de tous les nombres entiers entre a et b inclusivement. Par exemple, $f(1, 5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

   a) Déterminez la valeur de $f(13, 53)$.

   b) Déterminez la valeur de $f(13333 \ldots 33, 533 \ldots 3333)$, où le numéro 3 est répété n fois dans chaque expression.

4. Soit P un point dans le plan avec coordonnées des nombres entiers positifs et soit O l'origine.

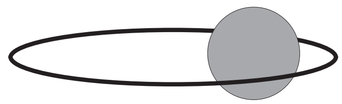
   Examinez le cercle avec le centre O, qui passe par P. Soit T la tangente au cercle à P, et supposez que T coupe l'axe-x à X et l'axe-y à Y.

   Démontrez que la superficie du triangle OXY ne peut pas être égale à 2002.

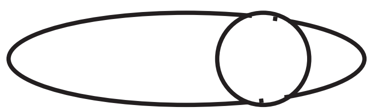
5. Pour chaque nombre entier positif n, soit M_n la matrice carrée, où chaque entrée de la diagonale est 2002 et chaque autre entrée est 1. Déterminez le plus petit nombre entier positif n tel quel $\det(M_n)$ est un carré parfait.

6. Un ellipse avec formule $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ se situe dans le plan $z = 0$. Quel est le locus de points du centre d'une sphère avec rayon b qui bouge sur l'ellipse de telle façon qu'elle touche l'ellipse à deux points.

   (On peut imaginer que la sphère roule sur un anneau elliptique et la sphère est juste assez petite pour traverser le centre de l'anneau.)



Oblique view



Top view

7. Au restaurant de Dim Sum à Sackville, tous les mets arrivent en 3 grandeurs: petit, moyen et grand. Les petits mets coutent \$$x$, les moyens coutent \$$y$ et les grands coutent \$$z$, où x, y et z sont des nombres entiers positifs où $x < y < z$. À ce restaurant, il n'y a pas de taxe et les prix n'ont pas changés depuis longtemps.

   Marguerite, Arthur et Edgar ont soupé hier soir et ensembles, ils ont commandé 9 petits mets, 6 moyens et 8 grands mets. Quand la facture arriva, on a entendu la conversation suivante:

   Marguerite: La facture est 2 fois plus élevée exactement que la dernière fois que j'ai mangé ici.

   Arthur: La facture est 3 fois plus élevée exactement que la dernière fois que j'ai mangé ici.

   Edgar: Ah! C'était delicieux! Et très abordable aussi. Même si on donnait une gratuité de 10% à la serveuse, le total est moins que \$100.00.

   Determinez les valeurs de x, y et z et démontrez que votre réponse est unique.