Compétition mathématiques CIPAS 2001

durée : 3 heures

Les membres d'une équipe peuvent collaborer entre eux, mais pas avec les membres d'une autre équipe. Pas de calculatrice ni de notes.

Écrivez vos différentes réponses sur des feuilles séparées puisque chaque question sera corrigée par un correcteur différent. Écrivez le numéro de l'équipe et le numéro de la question sur CHAQUE page. Justifiez votre travail.

Peu de points seront accordés pour des réponses fragmentaires ou incomplètes.

Le questionnaire contient 8 questions. Chaque question a le même poids.

1) P est un polynôme à coefficients entiers. Pour 4 entiers distincts, on a $P(x) = 9$. Montrez qu'il n'existe aucun entier x avec $P(x) = 16$.

2) Considérez la suite de Fibonnacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, …) avec $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pour tout n. Montrez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n+1}}$ est égal à $\frac{1}{11}$.

3) Montrez que parmi 13 nombres réels distincts, on peut trouver x et y tels que : $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$.

4) Montrez que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{4}{e}$.

5) Dans le ΔABC, R is the point milieu de BC. S est un point sur AC tel que CS=3SA. T est un point sur AB tel que l'aire du ΔRST est le double de l'aire du ΔTBR. Trouvez $\frac{AT}{TB}$.

6) Trouvez toutes les fonctions f qui sont différentiables partout et qui satisfont : $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ pour tout $x, y \in R$ avec $xy \neq 1$.

7) Évaluez l'intégrale $I(k)=\int_0^{\infty} \frac{\sin kx \cos^k x}{x}\,dx$, où $k \in N$.

Indication: rappelons que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

8) Trouvez trois entiers consécutifs, le premier étant le multiple d'un carré d'un nombre premier, le second étant le multiple du cube d'un nombre premier et le troisième étant le multiple de la puissance quatrième d'un nombre premier.