**Concours mathématique**
**Science Atantique, octobre2024**

- Chaque équipe (au plus deux membres) doit soumettre des solutions à autant de problèmes que possible. Vous pouvez partager ou diviser votre travail et écrire vos solutions comme bon vous semble.
- Il est interdit de communiquer avec d'autres équipes ou d'utiliser des notes, téléphones, livres, ordinateurs, ...
- Peu de points (possiblement aucun) seront donnés pour des solutions incomplètes. Les calculs et les preuves doivent être présentés clairement et complètement.
- Mettre votre numéro d'équipe (ID) sur chaque feuille réponse. Ne pas mettre vos noms personnels, le nom de votre université ni toute autre forme d'identification sauf le numéro d'équipe. Le haut de chaque page soumise devrait ressembler à ceci :

  Question 3, page 1 de 2 Équipe 97

- Mettre chaque solution sur une page séparée (ou pages séparées au besoin). Les différentes questions vont être corrigées par différentes personnes. Ne pas placer les réponses à différentes questions sur la même page.
- Le Concours dure 3 heure.

1. Décrivez précisément tous les entiers naturels $m$ tels que 13 divise $3^m + m$.

2. Supposons que $C_1$ et $C_2$ sont des cercles dans le plan, qui ne s'intersectent pas et qui ne sont pas contenus l'un dans l'autre. Les tangentes à $C_2$ à partir du centre de $C_1$ rencontrent $C_1$ aux points $A, B$. De même, les tangentes à $C_1$ à partir du centre de $C_2$ rencontrent $C_2$ aux points $C, D$. Montrez que $AB$ et $CD$ sont de même longueur.

3. Soit $S$ un ensemble, et $\diamond$ une opération binaire sur $S$ telle que

   - $x \diamond x = x$ pour tout $x \in S$
   - $(x \diamond y) \diamond z = (y \diamond z) \diamond x$ pour tous $x, y, z \in S$.

   Montrez que $x \diamond y = y \diamond x$ pour tous $x, y \in S$.

4. Déterminer, avec preuve, la valeur de

$$\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor$$

   pour chaque entier positif $n$ et nombre réel $x$.
   (Rappelons que $\lfloor t \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $t$.)

5. Soit $A_n$ une matrice symétrique $n \times n$ avec entrées $a_{i,i} = 2$, pour $1 \leq i \leq n$; $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$, pour $1 \leq i \leq n-1$; $a_{i,j} = 0$, sinon. Décrivez, avec preuve, tous les $n$ pour lesquels le déterminant de $A_n$ est un nombre premier.

6. Soit $T(n)$ le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, ..., n\}$ qui ne contiennent pas trois entiers consécutifs. Montrez qu'il existe des constantes positives $k$ et $\alpha$ telles que pour tous les $n$ assez grands, $T(n)$ est l'entier le plus proche du nombre réel $k\alpha^n$. (Ceci est souvent noté $\{k\alpha^n\}$.)

7. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction infiniment différentiable satisfaisant à

$$f'(x) = f(x^2), f(1) = 1,$$

   pour combien de $n \in \{1, 2, ..., 2024\}$ a-t-on $f^{(n)}(0) = 0$?

8. Pour tous entiers positifs $a, n$, soit $a \uparrow 1 = a$, et par récurrence on définit

$$a \uparrow (n+1) = a^{(a \uparrow n)}.$$

   Quel est le plus petit entier $n$ pour lequel $3 \uparrow n > 9 \uparrow 2024$?